La respuesta buena es siempre a)
Primer parcial. Matemática VII 7:30-9:30 Miércoles 24 de enero de 2007
Este examen vale 25 puntos para un total de 100 puntos.

Nombre:
Carnet:

1 (4pt) La distribución $x^2\delta'(x-2)$ es:
a) $-4\delta(x-2)+4\delta'(x-2)$
b) $4\delta'(x-2)$
c) $-4\delta(x-2)$
d) $-4\delta(x-2)-4\delta'(x-2)$

Solución
Hay que calcular $\langle f(x)x^2, \delta'(x-2)\rangle$. Integrando por partes tenemos que es igual a $-< f'(x)x^2 + 2xf(x), \delta(x-2) >$ evaluando la delta obtenemos $-4f'(2)-4f(2)$ eso nos dice que la distribución es $\delta'(x-2)-4\delta(x-2)$. Noten el cambio de signo para la *delta*$'$.

2 (4pt) ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial $xu''(x)+(x+3)u'(x)+u(x)=0$ en el sentido de las distribuciones?
a) $\delta(x)+\delta'(x)$
b) $\delta(x)-\delta'(x)$
c) $\delta'(x)+\delta''(x)$
d) $\delta'(x)$

Solución
A expensas de un método general para resolver este tipo de ecuaciones no nos queda otro remedio que probar caso por caso. En matemáticas lo mejor es o ser un genio o ser ordenado. No soy ni lo uno ni lo otro pero puedo enseñaros a ser lo segundo. Para hacerlo con algún orden llamemos L al operador

$$L = x\frac{d}{dx} + (x+3)\frac{d}{dx} + 1 \tag{1}$$

Calculemos $L\delta$, $L\delta'$ y $L\delta''$. Eso nos enseñará cual es la solución correcta. Notemos primero que

$$x\delta''(x) = -2\delta'(x) \qquad x\delta'''(x) = -3\delta''(x) \qquad x\delta''''(x) = -4\delta'''(x)$$
$$(x+3)\delta'(x) = -\delta(x)+3\delta'(x) \qquad (x+3)\delta''(x) = -2\delta'(x)+3\delta''(x)$$
$$(x+3)\delta'''(x) = -3\delta''(x)+3\delta'''(x)$$

Eso se puede probar caso por caso como acabamos de hacer en el ejercicio anterior o bien con lasiguiente fórmula general

$$x^n\delta^k(x) \Rightarrow \langle x^n f(x), \delta^k(x)\rangle = (-1)^k \left\langle \frac{d^k}{dx^k}\left(x^n f(x)\right), \delta(x)\right\rangle \tag{2}$$

Ahora debemos hacer la derivada por la regla de Leibniz y hacer $x=0$ para *evaluar* la delta. Fíjate que en el proceso no puede quedar nigún x vivo. Eso obliga a que al menos hay que derivar n veces $n \le k$ el resultado final es

$$\langle x^n f(x), \delta^k(x)\rangle = (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k-n}(x) \Rightarrow x^n\delta^k(x) = (-1)^n \binom{n}{k} \delta^{(k-n}(x) \tag{3}$$

Con esto en la mano podemos escribir:

$$L\delta(x) = -2\delta'(x) - \delta(x) + 3\delta'(x) + \delta(x) = \delta'(x) \tag{4}$$
$$L\delta'(x) = -3\delta''(x) - 2\delta'(x) + 3\delta''(x) + \delta'(x) = -\delta'(x) \tag{5}$$
$$L\delta''(x) = -4\delta'''(x) - 3\delta''(x) + 3\delta'''(x) + \delta''(x) = -2\delta''(x) \tag{6}$$

De ahí vemos que la respuesta es $\delta(x)+\delta'(x)$

3 (4pt) La integral de $\int_0^\pi x^2 e^{-2x}dx$ es

a) $-1/4(-e^{2\pi}+1+2\pi+2\pi^2)e^{-2\pi}$

b) $-1/4(-e^{2\pi}+1-2\pi+2\pi^2)e^{\pi}$

c) $-1/4(-e^{2\pi}+2\pi+2\pi^2)e^{-2\pi}$

d) $(1+2\pi+2\pi^2)e^{-2\pi}$

Solución

La idea es utilizar distribuciones, pero partes o algún otro truco es igual de bueno. Definamos

$$\phi(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0<x<2 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases} = x^2(H(x)-H(\pi-2)) \tag{7}$$

Entonces $I=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-2x}dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_g'''(x)e^{-2x}dx$. Sólo tenemos que calcular la tercera derivada.

$$\phi_g'(x)=2x(H(x)-H(x-\pi))+x^2(\delta(x)-\delta(x-\pi))=2x(H(x)-H(x-\pi))-\pi^2\delta(x-\pi) \tag{8}$$

$$\phi_g''(x)=2(H(x)-H(x-\pi))-2\pi\delta(x-\pi)-\pi^2\delta'(x-\pi) \tag{9}$$

$$\phi_g'''(x)=2\delta(x)-2\delta(x-\pi)-2\pi\delta'(x-\pi)-\pi^2\delta''(x) \tag{10}$$

Luego

$$I=\frac{1}{8}\left(2-2e^{-2\pi}-4\pi e^{-2\pi}-4\pi^2 e^{-2x}\right) \tag{11}$$

4 (4pt) El límite $n\to\infty$ de $f_n(x)=\begin{cases} n & \text{si} \quad 0<x<1/n \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$ es

a) $\delta(x)$

b) $\delta'(x)$

c) $\delta(x)+\delta'(x)$

d) 0

Solución

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$ Noten que $f_n(x)=nf(nx)$ y $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ y por el lema estandar el límite es la $\delta(x)$.

5 (2pt) ¿Cuál es la derivada generalizada de la Delta de Dirac?

a) Ninguna de las anteriores.

b) La función de Heaviside.

c) No tiene derivada generalizada porque ella misma es una distribución.

d) La delta de Dirac.

6 (3pt) ¿Cuánto vale la integral $\int_{-4}^{4}\delta(x-3)\cos(\pi(x-2))dx$

a) -1

b) 0

c) ∞

d) 1

Solución

Hay que evaluar el integrando en $x=3$ da el $\cos(\pi)=-1$

7 (4pt) ¿Pueden multiplicarse una función $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ por una distribución?

a) Siempre.

b) Sólo si la distribución satisface las condiciones de Ian-Fleming.

c) Sólo si la función satisface las condiciones de Ian-Fleming.

d) Nunca.

Solución
Ian Lancaster Fleming (28 de Mayo, 1908 - 12 de Agosto, 1964) fue un escritor inglés y periodista. Recordado por escribir las series de novelas de James Bond, por eso esta es la pregunta 007. Ustedes son jóvenes, pero quizá alguno recuerde Chitty, Chitty, Bang, Bang. Tambien suya.